

Leseprobe aus Kapitel 4 ‚Elektrizität‘ des Buchs
 ‚Strukturbildung und Simulation technischer Systeme‘

Weitere Informationen zum Buch finden Sie unter
strukturbildung-simulation.de

In diesem Beispiel aus dem Kapitel 4 ‚Elektrizität‘ wird die Flussdichte eines Dauermagneten durch Integration der in einer Test-Spule induzierten Spannung gemessen.

4.3.9 Messung des magnetischen Flusses

Zur Berechnung induzierter Spannungen $u.L=N \cdot d\phi/dt$ aus der Geschwindigkeit der Fluss-Änderung $\Delta\phi/\Delta t$, muss die Änderung des magnetischen Flusses $\Delta\phi(x)$, der eine Mess-Spule mit N Windungen durchsetzt, über dem Verschiebeweg x bekannt sein. Zu Übungszwecken soll der Verlauf der Flussdichte B(x) eines **Stabmagneten** gemessen und simuliert werden.

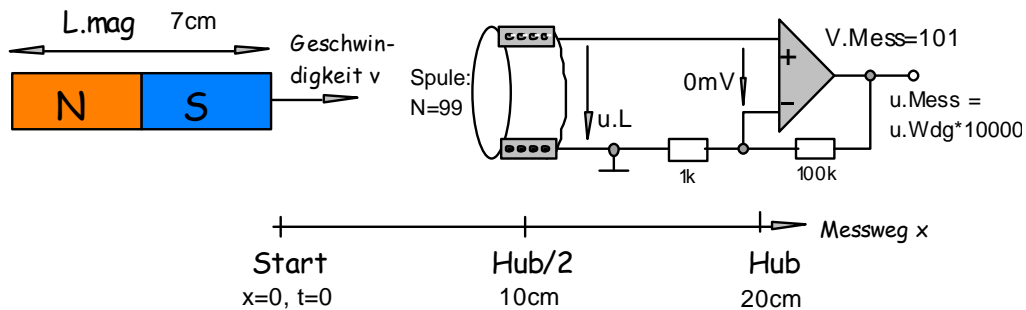


Abb 4-66 Messung der induzierten Spannung. Ihre Integration ist ein Maß für den gespeicherten magnetischen Fluss.

Als Testobjekt dient hier ein Magnet mit der **Länge L=7cm** und einem **Querschnitt A=10cm²**. Der gesamte Verschiebeweg **x.mess** ist **20cm**.

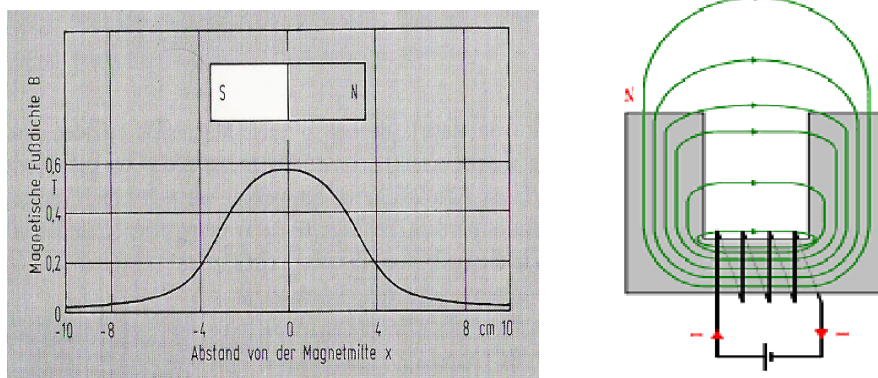


Abb. 4-67 Links: gemessene Flussdichte eines Stab-Magneten (Länge L.mag = 7cm) als Funktion des Abstandes x von der Mitte. An den Enden des Magneten ist die Flussdichte auf 1/3 des Maximalwerts in der Mitte abgefallen. Grund dafür ist die Streuung der Feldlinien. Rechts: Kanalisierung der Feldlinien in Eisen und Streuung in Luft.

Messung der induzierten Spannung

Einfach zu messen ist die Induzierte Spannung $u.L$. Um daraus auf die Fluss-Änderung $\Delta\phi = \int u.L \cdot dt$, kurz $\phi = u.L \cdot t$, schließen zu können, benötigen wir einen Integrator für die Spulen-Spannung $u.L$. Der Verlauf der Spannung $u.L$ über dem Weg x kann durch einen xy-Schreiber, ein Speicher-Oszilloscop oder ein PC-Mess-System aufgezeichnet werden. Falls Sie all dies nicht zur Verfügung haben, bleibt uns hier noch die Simulation.

Zur Messung der **induzierten Spannung $u.L$** wird die Mess-Spule mit einer Geschwindigkeit $v \approx 1 \text{ cm/s}$ über den Magneten gezogen - oder umgekehrt, denn für die induzierte Spannung $u.L$ ist nur die Relativ-Geschwindigkeit zwischen Magnet und Spule maßgeblich. Wie wir bei den folgenden Simulationen berechnen werden, sind bei diesen Geschwindigkeiten Windungs-Spannungen im μV -Bereich und bei einer Spule mit $N=99$ Windungen Spulenspannungen im mV -Bereich zu erwarten. Leichter zu messen sind Spannungen im Volt-Bereich.

Deshalb schalten wir der Spule zuerst einen Präzisions-Verstärker mit einer Spannungs-Verstärkung $V.\text{Mess}=101$ nach. Er besitzt einen hochohmigen Eingang und einen niederohmigen Ausgang. So wird die **Windungs-Spannung $u.Wdg = d\phi/dt$** der Spule mit $N \cdot V.\text{Mess} = 10000$ zur Mess-Spannung $u.\text{Mess}$ verstärkt. (Einzelheiten zu Thema Verstärker finden Sie im Kapitel 7 Elektronik unter Operations-Verstärker.)

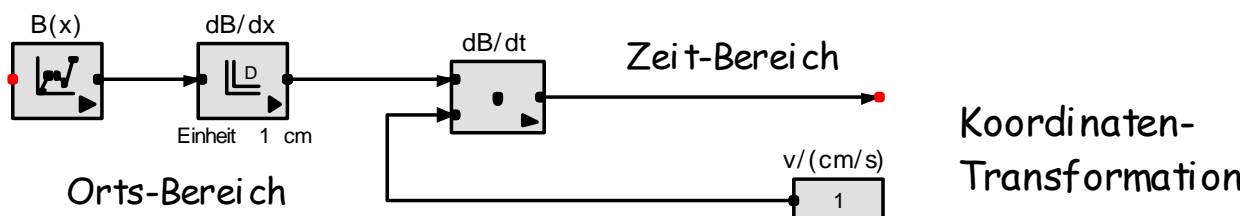
Aus der **Verschiebe-Geschwindigkeit v** ergibt sich die zeitliche Fluss-Änderung $\Delta\phi/\Delta t$ als die in einer Windung induzierte Spannung. Durch Multiplikation mit der **Windungszahl N** erhalten wir die **Spulenspannung $u.L$** . Ihr zeitliches Integral ist ein Mass für die Fluss-Änderung $\Delta\phi$. Weit außerhalb der Spule sei der Fluss $\phi=0$. Da beginnen wir die Messung mit Null-gesetztem Integrator: $u.L=0$ entspricht dann $\phi=0$.

Dann verschieben wir die Mess-Spule über den Magneten und auf der entgegen-gesetzten Seite wieder heraus. Dann wird Spannung $u.L$ induziert und der Integrator erzeugt eine Flussproportionale Ausgangs-Spannung an.

Koordinaten-Transformation

Zur Abschätzung der Spannung $u.L$, die bei einer Verschiebung des Magneten durch die Spule mit einer Geschwindigkeit $v=1 \text{ cm/s}$ induziert wird, benötigen wir den Anstieg der in **Abb.6-30** gezeigten **Messkurve $B(x)$** . Ihre maximale Steigung beträgt etwa $dB/dx_{\text{max}} = 0,1 \text{ T/cm}$. Mit der Verschiebe-Geschwindigkeit $v=dx/dt$ gilt die

Transformations-Gleichung: $d.u/dt = v \cdot du/dx$



Struktur 4-21 Gemessen wurde eine Flussdichte $B(x)$, indem ein Mess-Spule mit einer Geschwindigkeit v über den Magneten gezogen worden ist. Zur Berechnung der in der Spule induzierten Spannung wird $dB/dt(t)$ benötigt: $dB/dt = v \cdot dB/dx$.

Die Transformations-Gleichung verlegt die Differenzierung vom **Orts-Bereich du/dx** in den **Zeit-Bereich du/dt** . Transformations-Parameter ist die Verschiebe-Geschwindigkeit $v = dx/dt$. In unserem Beispiel messen wir die **Wege x in cm** und die **Zeiten t in Sekunden s** . Das sind die **Basis-Einheiten** für den Orts- und den Zeitbereich.

Bei einer Verschiebe-Geschwindigkeit von $v=1\text{cm/s}$ und einer maximalen Flussdichte-Variation $\text{dB}/\text{dx}_{\text{max}}=0,1\text{T/cm}$ wird

$$\text{dB}/\text{dt}_{\text{max}} = v \cdot \text{dB}/\text{dx} = 0,1\text{T/s} = 0,01\text{mV}/\text{cm}^2.$$

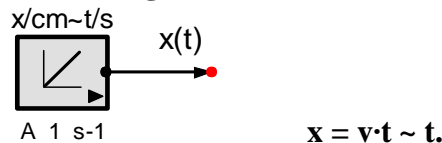
Nun berechnen wir die zugehörige, zeitliche Fluss-Änderung für einen Spulen-Querschnitt $A=10\text{cm}^2$: $\text{d}\phi/\text{dt} = A \cdot \text{dB}/\text{dt} = 0,1\text{mV}$.

Das ist die in einer Windung induzierte Spannung. Bei $N=1000$ Windungen ergäbe dies die gesamte, maximal induzierte Spannung: $u \cdot L_{\text{max}} = N \cdot \text{d}\phi/\text{dt} = 100\text{mV}$. Das wäre groß gegen die **typische, nicht abgegliche Offset-Spannung u_0** des TL071 von 2mV . Damit ist die erste Bedingung $u \cdot L_{\text{max}} \gg u_0$ durch den TL071 bereits ohne Abgleich erfüllt. Hier wurde jedoch eine kleinere Spule mit $N=100$ gewählt, was einen Null-Abgleich erforderlich macht.

Ausführung der Koordinaten-Transformation

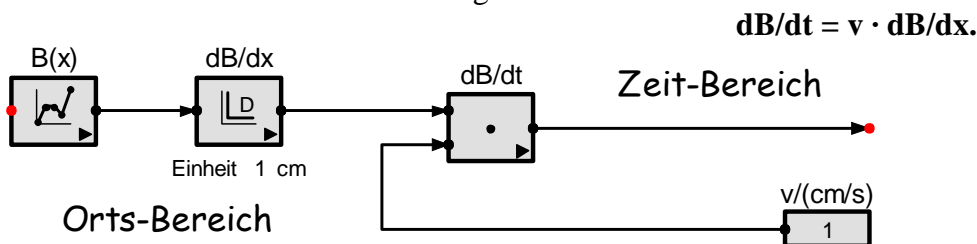
Gemessen ist die **Flussdichte $B(x)$** des Stab-Magneten als Funktion des Messorts x (hier von 0 bis 20cm). Der Nullpunkt der Messung lag in der Mitte des Magneten, die maximale Verschiebung (der Hub) betrug $\pm 10\text{cm}$.

Die Simulation findet jedoch immer als Zeit-Funktion statt und die **Zeit t** als unabhängige Variable kann nur positiv sein. Deshalb verschieben wir den Startpunkt der Messung 10cm nach links und verschieben die Mess-Spule von 0 bis $x_{\text{max}}=20\text{cm}$. Die Verschiebung $x(t)$ wird durch eine **Rampe $x \sim t$** dargestellt. Die Verschiebe-Geschwindigkeit $v=dx/dt$ stellt den Zusammenhang zwischen dem **Weg x** und der **Zeit t** her:



Zur Berechnung der in der Mess-Spule mit N **Windungen** induzierten Spannung $u \cdot L = N \cdot \text{d}\phi/\text{dt}$ – mit dem Fluss $\phi = B \cdot A$ (B =Flussdichte, A =Spulen-Querschnitt) - wird $u \cdot L = N \cdot A \cdot \text{dB}/\text{dt}$.

Die Änderungs-Geschwindigkeit dB/dt erhalten wir aus der Flussdichte-Variation mit dem Ort dB/dx und der Verschiebe-Geschwindigkeit $v=dx/dt$:



Struktur 4-22 Differenzierung im Orts-Bereich. Die Transformation in den Zeit-Bereich geschieht durch **Multiplikation mit der Geschwindigkeit $v=dx/dt$** .

Maßgeblich für die Induktion von Spannungen ist nur die **Relativ-Geschwindigkeit v** . Je höher sie ist, desto kürzer wird die Messzeit, denn der gesamte Messweg ist konstant (hier $x_{\text{max}}=20\text{cm}$).

Die Mess-Spule

Als Messmittel verwenden wir eine Spule aus **Kupfer-Lackdraht (CuL)** mit bekannter Windungszahl N . Ihr Innen-Durchmesser ist gerade so groß, dass der Magnet durch sie hindurch geschoben werden kann (oder umgekehrt).

Da hier mit geringsten Leistungen gearbeitet wird und der **Messort x** möglichst scharf definiert sein soll, muss der CuL-Draht der Mess-Spule so dünn wie möglich sein (Durchmesser z.B. **0,05mm**). Der Spulen-Widerstand errechnet sich nach der Formel

$$R_{Sp} = \rho \cdot l/A. \text{ Er liegt hier bei } 1k\Omega.$$

Durch den nachgeschalteten Verstärker (Impedanz-Wandler) spielt der Spulen-Widerstand bei der Messung keine Rolle.

Realisierungs-Möglichkeiten eines Flussmessers

Da induzierte Spannungen $u.L=N \cdot d\phi/dt$ proportional zur zeitlichen Änderung des magnetischen Flusses $d\phi/dt$ sind, wir aber den **Fluss ϕ** , bzw. die Flussdichte $B= \phi/A$ selbst bestimmen wollen, müssen wir einen Integrator nachschalten. Zur Auswahl steht eine mechanische Lösung durch ein **Galvanometer** oder eine elektronische Lösung mit **Operations-Verstärker**.

Galvanometer sind Drehspul-Instrumente ohne Federfesselung. Ihr Zeigerausschlag $\Delta\phi$ ist der durch die Spule geflossenen Ladung $q=i \cdot t$ proportional. Hier wird der Mess-Strom i_{Mess} durch eine induzierte Spannung $u.L$ erzeugt. Daher ist $q=i_{Mess} \cdot t \sim \phi=u.L \cdot t$. Dann zeigt der Galvanometer-Ausschlag $\Delta\phi$ die Fluss-Änderung $\Delta\phi$ proportional an.

Galvanometer werden im Abschnitt 5.4.4 ‚Elektromagnetische Drehmomente‘ besprochen. Zur hier geplanten Messung magnetischer Flüsse müssen sie äußerst empfindlich sein. Bei elektrischer oder mechanischer Überlastung werden sie sofort zerstört.

Da sie auch nicht ganz einfach zu beschaffen sind, entschied sich der Autor für einen elektronischen Integrator zur Messung des magnetischen Flusses.

Elektronische Integratoren sind sehr genau, relativ leicht zu realisieren und robust gegen Übersteuerung. Ihre Funktion soll anschließend kurz erklärt werden. Falls Sie an der Realisierung elektronischer Integratoren **nicht interessiert** sind, können Sie die Erläuterungen dazu überfliegen. Das in diesem Zusammenhang behandelte Thema **Koordinaten-Transformation** ist allerdings von allgemeiner Bedeutung.

Den elektronischen Integrator im Detail zu verstehen, ist zum Verständnis der folgenden Simulationen zur Messung magnetischer Flüsse nicht unbedingt erforderlich. Dann kann man den Integrator als Block mit der **Integrations-Zeitkonstanten $T.I$** betrachten.

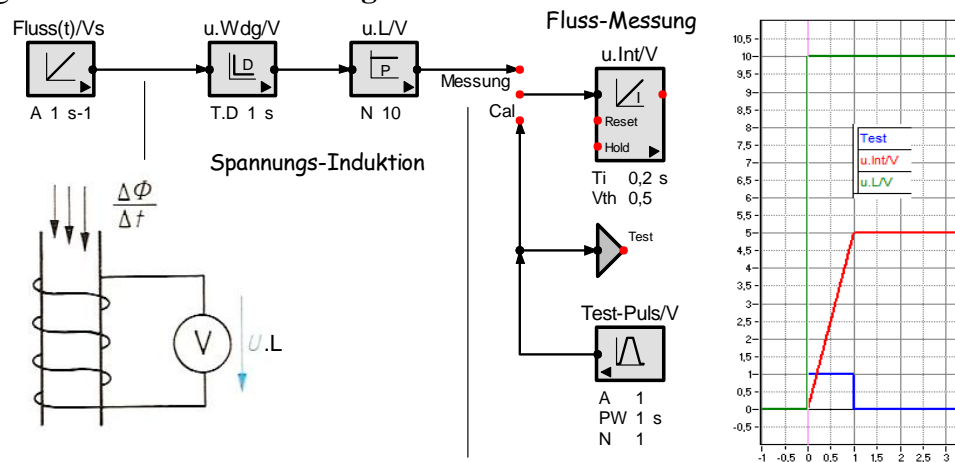


Abb 4-68 Spannungs-Integration: Messung des magnetischen Flusses durch Integration der induzierten Spannung. Sie kann durch die Bewegung einer Spule im Magnetfeld oder durch die zeitliche Änderung des Flusses selbst erzeugt werden.

Kalibrierung des Fluss-Messers

Wie die Struktur der Fluss-Messung zeigt, macht der integrierende Fluss-Messer die Differenzierung des Flusses bei der Spannungs-Induktion rückgängig. Deshalb ist die Änderung des **Integrator-Ausgangs Δu_{Int}** der Änderung des magnetischen Flusses $\Delta\phi$ proportional:

$$\Delta u_{\text{Int}} = \Delta\phi \cdot T.D / T.I$$

Die Differenzier-Zeitkonstante $T.D$ ist hier 1s. D.h., die Windungs-Spannung $u_{\text{Wdg}} = \Delta\phi / \Delta t$ wird Maßstabs-getreu berechnet.

Die Integrations-Zeitkonstante $T.I$ ist das Mass für die Langsamkeit des Integrators. Sie wird durch einen Testsprung $u.e$ am Eingang offenbar. Er erzeugt am Integrator-Ausgang einen rampenförmigen Anstieg: $u_{\text{Int}} = u.e \cdot t / T.I$, der umso langsamer wird, je größer die Integrations-Zeitkonstante $T.I$ ist. $T.I$ würde beim Galvanometer durch die Reibungs-Konstante bestimmt werden. Beim elektronischen Integrator wird $T.I$ durch die Beschaltung eines Operations-Verstärkers bestimmt (Beispiel folgt).

Ist $T.I$ kleiner als 1s, bewirkt dies genau wie die mehr **Windungen N** auf der Mess-Spule, eine Geschwindigkeits-Erhöhung am Integrator-Ausgang, was eine Signal-Verstärkung bedeutet. Entsprechend kann $T.I$ so an die Windungszahl angepasst werden, dass die Spulenspannung $u.L$ richtig angezeigt wird

Ein elektronischer Fluss-Messer

Elektronische Integratoren werden durch invertierende Operations-Verstärker realisiert, in deren Rückführung ein Kondensator $C.R$ und in deren Eingang ein Widerstand $R.E$ liegt. Die Ausgangs-Geschwindigkeit des Integrators wird durch die Eingangs-Spannung am Eingangswiderstand $R.E$ gesteuert

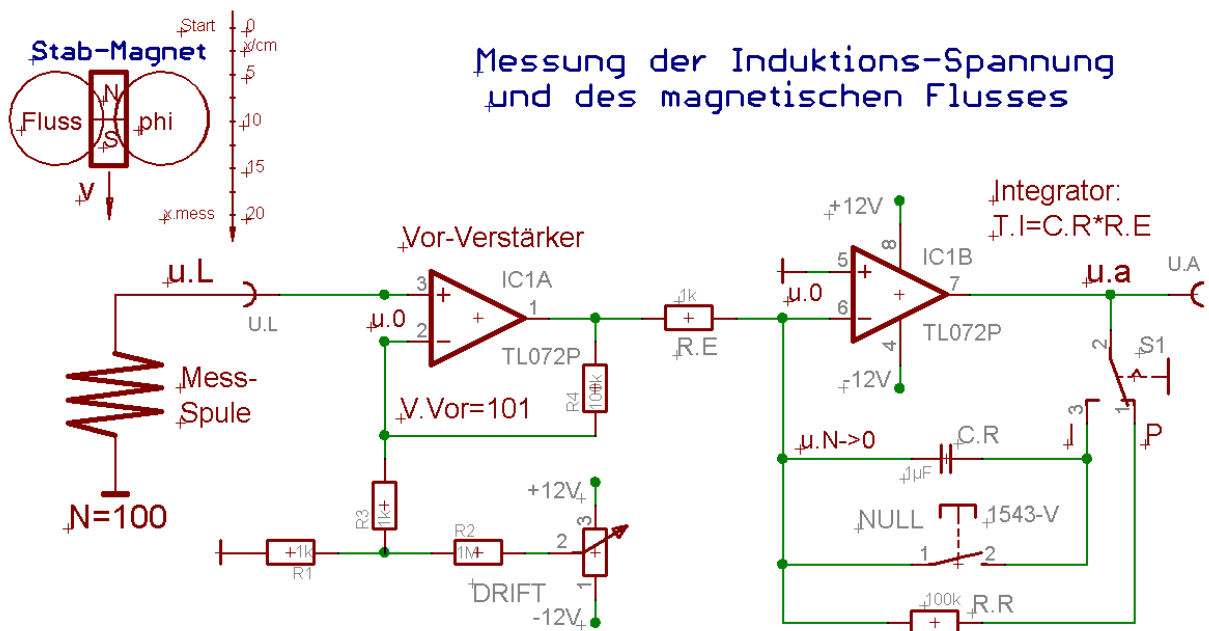


Abb. 4-69 Ein Dauermagnet wird durch eine Mess-Spule geschoben. Der Vor-Verstärker ist ein Impedanz-Wandler mit Spannungs-Verstärkung $V.Vor = 1 + R.4/R.3 = 101$, der zweite kann, je nach Stellung des Schalters $S1$, proportional (P) oder integral (I) verstärken. Im P-Betrieb zeigt der Ausgang $u.a$ die mit $R.4/R.3 = 100$ verstärkte, invertierte induzierte Spannung $u.L$ an, im I-Betrieb den magnetischen Fluss der Spule in dem Bereich, über den die Mess-Spule verschoben wird.

Der Endverstärker kann durch den Schalter S1 zwischen proportionalem (P) und integrierendem (I) Betrieb umgeschaltet werden. Im P-Betrieb zeigt er die induzierte Spannung $u.L$ an, im I-Betrieb den magnetischen Fluss. Die Funktion elektronischer Integriertoren wird nun soweit erklärt, wie es zum Verständnis der Fluss-Messung, der Dimensionierung und des Abgleichs erforderlich ist.

Operations-Verstärker

Operations-Verstärker (OP's) besitzen, außer den zwei Anschlüssen für die Versorgung (hier +12V und -12V), zwei **Differenz-Eingänge e+ und e-** und einen **Ausgang a**.

OP's verstärken die Differenz u.d der Eingangs-Pegel an e+ und e-. Ihre Differenz-Verstärkung $v.0 = \Delta u.a / \Delta u.d$, auch offene Verstärkung genannt, geht gegen unendlich (**größer als $10^5 = 100mV/\mu V$**). Für die Voll-Aussteuerung des Ausgangs benötigen OP's Differenz-Eingangsspannungen, die kleiner als 0,1mV sind.

Ohne äußere Beschaltung sieht es so aus, als wäre der OP ein Schalter. Sein Ausgang liegt nahe der positiven Versorgung (hier -10V), wenn $u.d > 0$ ist und nahe der negativen Versorgung (hier -10V), wenn $u.d < 0$ ist.

Die Gegenkopplung des OP-Ausgangs bewirkt, dass sich die Ausgangs-Spannung so einstellt, dass die **Differenz-Eingangs-Spannung u.d gegen Null** geht. Durch die äußere Beschaltung durch Widerstände und Kondensatoren lassen sich **proportionale (P), integrierende (I) und differenzierende Verstärker** realisieren.

OP's werden zu 1, 2 und 4 in Dual-In-Line (DIL)-Gehäusen angeboten (Abbildung oben, Preis ca. 25ct pro OP). Wir verwenden hier den **TL072 mit zwei OP's TL071**. Er zeichnet sich durch besonders niedrige Eingangs-Ströme aus: ca. 10pA.

Der Operations-Verstärker als Impedanz-Wandler

Durch die direkte Verbindung des invertierenden Eingangs e- mit dem OP-Ausgang a entsteht ein Einheits-Verstärker mit hochohmigem Eingang und niederohmigem Ausgang (Abbildung oben, links). Er wird am positiven Eingang angesteuert (die induzierte Spannung $u.L$ an e+). Da die Änderung der Differenz-Eingangs-Spannung wegen der hohen $v.0$ gegen Null geht, läuft der Verstärker-Ausgang a dem Eingang e+ hinterher (Regelkreis mit Einer-Rückführung): die Spannungs-Verstärkung geht gegen 1: $v.u = u.a / u.e \Rightarrow 1$.

Der Eingangsstrom eines TL071 beträgt etwa 10pA. Daher belastet er die ansteuernde Quelle so gut wie nicht. Ihr Innen-Widerstand – hier der Widerstand $R.Sp$ der Spule mit 1000 Windungen aus dünnem CuL-Draht – dürfte bis über $1M\Omega$ sein, ohne dass es zu einer nennenswerten Spannungs-Teilung kommt.

Die Ausgänge von OP's sind bis über 10mA belastbar. Die Gegenkopplung verhindert einen Abfall der Ausgangs-Spannung bei Belastung des Verstärker-Ausgangs. M.a.W.: der Ausgangs-Widerstand des gegengekoppelten OP's geht gegen Null. Daher der Name Impedanz-Wandler für den Op im nicht-invertierenden Betrieb. Durch den Impedanz-Wandler sehen wir die induzierte Spannung rückwirkungsfrei.

Der nicht-invertierende Verstärker

Koppelt man über einen Spannungs-Teiler nur einen Teil der Ausgangs-Spannung auf den invertierenden Eingang des OP's zurück, muss dieser seine Ausgangs-Spannung $u.a$ um diesen Teil erhöhen, um seine Differenz-Eingangs-Spannung $u.d$ gegen Null gehen zu lassen. Der Ausgangs-Teiler: $u.N / u.a = R.R / (R.R + R.E)$

Die nicht-invertierende Verstärkung für $u.d = u.e - u.N \rightarrow 0$: $u.a/u.e \approx 1 + R.R/R.E$

Die nicht-Invertierende Verstärkung kann also über das Widerstands-Verhältnis $R.R/R.E$ mit der gleichen Präzision eingestellt werden, wie die Spannungs-Teilung.

Die zuvor beim Impedanz-Wandler beschriebenen Eigenschaften des Verstärkers bleiben erhalten: hochohmiger Eingang und niederohmiger Ausgang.

Der Operations-Verstärker als Inverter

Gegengekoppelte OP's stellen (weil gute Regelkreise) ihre Ausgangs-Spannung $u.a$ immer so ein, dass ihre **Differenz-Eingangs-Spannung $u.d$ gegen Null** geht (Regelkreis). Im zweiten Verstärker der **Abb. 5-86** liegt der nicht-invertierende Eingang **$e+$ auf Null** (=Masse).

Dadurch erzeugt die Gegenkopplung beim Inverter an dessen invertierendem Eingang ($e-$) ebenfalls ein Null-Potenzial. Der invertierende Eingang $e-$ ist ein **Strom-Summenpunkt**. Der Eingangsstrom $i.e = u.e/R.E$ fließt auf $e-$ rückwirkungsfrei zu und wird über die Rückführung zum Verstärker-Ausgang abgeleitet. Dabei entsteht die Ausgangs-Spannung in Abhängigkeit von dem Bauelement in der Rückführung.

Beim proportional-invertierenden Verstärker liegt ein Widerstand **$R.R$ in der Rückführung**. Ihm wird der Eingangs-Strom $i.e$ eingepreßt, sodass er die Spannung **$u.R = R.R \cdot i.e$** bildet. Da $e-$ bei Null liegt, wird **$u.a \approx -u.R = -u.e \cdot R.R/R.E$** . So erhält man eine durch die **Beschaltung $R.R/R.E$ einstellbare Spannungs-Verstärkung $v.u = u.a/u.e = -R.R/R.E$** .

Hier sollen induzierte Spannungen $u.L$ im mV-Bereich in den Volt-Bereich verstärkt werden, z.B. um sie durch AD-Wandler digitalisieren zu können. Benötigt wird also $|v.u| = 100$. Wir wählen **$R.R = 100k\Omega$** und müssen dazu **$R.E = 1k\Omega$** einbauen.

Da $e-$ auf Null-Potenzial liegt, ist $R.E$ der Eingangs-Widerstand des Inverters. Er bildet mit dem Widerstand der Spule ($R.Sp$, hier auch ca. **$1k\Omega$**) **einen Spannungs-Teiler**. Hätten wir die Mess-Spannung $u.L$ ohne die Zwischenschaltung eines Impedanz-Wandlers an den Inverter-Eingang angeschlossen, würde sich die äußere Spulenspannung etwa halbieren. Durch den Impedanz-Wandler interessiert der Spulen-Widerstand $R.Sp$ nicht mehr.

Der Operations-Verstärker als Integrator

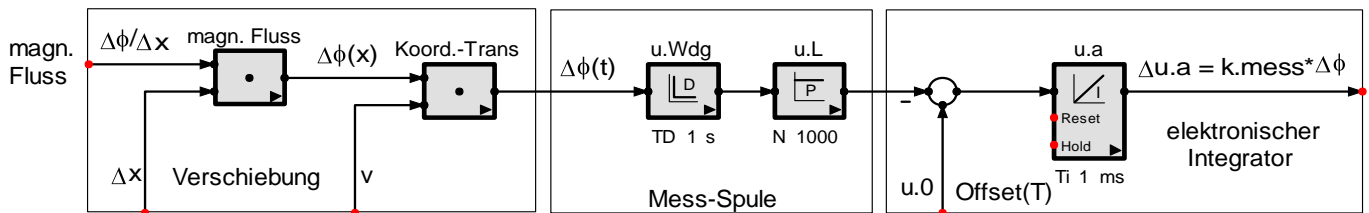
Der Eingangs-Strom $i.e = u.L/R.E$ wird hier einem **Rückführungs-Kondensator $C.R$** eingepreßt, der ihn zur Spannung **$u.CR = q/C.R$** integriert – mit $q = \int i.edt$. Die Ausgangs-Spannung $u.a$ ist wegen des künstlichen Nullpunkts von $e-$ das Abbild der Kondensator-Spannung: **$-u.a = -u.CR = R.R \cdot \int (u.L/R.E)dt$** .

So realisieren elektronische Integratoren die Gleichung
- mit der Integrations-Zeitkonstanten

$$-u.a = (1/T.I) \cdot \int (u.L dt) \\ T.I = C.R \cdot R.E.$$

In diesen Gleichungen ist $u.L \cdot dt$ das Differenzial **$d\phi$** des gesuchten magnetischen Flusses ϕ . Daher ist $u.a$ ist dem gesamten **Fluss ϕ proportional**. Bei konstanter **Flussdichte B** wird **$-\Delta u.a = N \cdot \Delta \phi / T.I$** . Die Delta-Werte besagen, dass sowohl $u.a$ als auch ϕ Anfangswerte haben können. Der Anfangswert von ϕ geht gegen Null, wenn die Messung bei großem Abstand des Magneten von der Spule beginnt. Der **Anfangswert $u.a = 0$** wird durch kurzzeitiges **Kurzschließen des Kondensators $C.R$** hergestellt. Danach beginnt die Messung bei **$t=0$** und **$\phi \approx 0$** und es gilt: **$-u.a = N \cdot \phi / T.I$** .

In der obigen Mess-Schaltung lässt sich der Ausgangs-Verstärker durch einen Umschalter S1 proportional (P) oder integrierend (I) betreiben. Im P-Betrieb zeigt der Ausgang die induzierte Spannung ($\sim u.L$), im I-Betrieb zeigt er den magnetischen Fluss ϕ an.



Struktur 4-23 Signal-Verlauf zu elektronischen Messung des magnetischen Flusses

Skalenfaktor und Integrations-Zeitkonstante

Den **Skalenfaktor** des Flussmessers, also seine Empfindlichkeit, definieren wir als

$$\mathbf{k.mess} = -\Delta u.a / \Delta \phi \quad - \text{z.B. in } \mathbf{mV / \mu Vs} = \mathbf{1/ms}$$

und berechnen ihn aus:

$$\mathbf{k.mess} = \mathbf{N / T.I.}$$

Die Integrations-Zeitkonstante **T.I.**, realisiert durch **CR·RE**, legt den **Messbereich**

$$\mathbf{k.mess} = \Delta u.a_{\max} / \Delta \phi_{\max} \text{ des Flussmessers fest:} \quad \mathbf{T.I} = |\mathbf{k.mess}| \cdot \mathbf{N.}$$

Zur Bestimmung der benötigten Integrations-Zeitkonstante **T.I=C.R·R.E** zu einer geforderten **Empfindlichkeit k.mess** muss die **Windungszahl N** der Messspule bekannt sein.

Dazu das folgende Beispiel:

Gefordert wird der Messbereich der Flussdichte B: z.B. soll **B=1T** durch **u.a = 10V** angezeigt werden.

Dazu gehört bei einem **Spulen-Querschnitt A=10cm²** der magnetische Fluss $\phi=B \cdot A=10\mu Vs$.

Das ergibt den benötigten Skalenfaktor

$$\mathbf{k.mess} = \mathbf{1V / \mu Vs} = \mathbf{10^6/s.}$$

Daraus wiederum folgt die erforderliche Integrations-Zeitkonstante: **T.I = N/k.mess.**

Wir wählen **N=1000**. Damit wird **T.I=1ms**, z.B. realisiert durch **CR=1μF** und **RE=1kΩ**.

Zur Auswahl des Operations-Verstärkers

Nun soll die Frage nach dem für diese Mess-Aufgabe geeigneten Operations-Verstärker geklärt werden. Ein gängiger OP-Typ ist z.B. der TL071. Er hat ohne Abgleich eine Eingangs-Ruhe-spannung (die **Offset-Spannung u.0**, bei der $u.a=0$ wird) von **etwa 2mV**. Sie lässt sich, wie oben gezeigt, abgleichen. $u.0$ hat eine **Temperatur-Drift D.T=du.0/dT** von etwa **10μV/K**, die sich nicht abgleichen lässt. Um er-messen zu können, ob dieser Verstärker (Preis etwa 0,50€) für unsere Mess-Aufgabe ausreicht, müssen wir die zu erwartenden Eingangsspannungen $u.L_{\max}$ berechnen. Sie müssen groß gegen **$u.0 \approx 2mV$** sein, also fast im Volt-Bereich liegen.

Reale Operations-Verstärker benötigen auch ohne Aussteuerung Differenz-Eingangs-Spannungen $u.0$, bei denen die Ausgangs-Spannung zu Null wird, eine Herstellungs-bedingte Offset-Spannung $u.0$. Sie liegt bei den meisten OP's bei 1mV. Bei Chopper-stabilisierten Präzisions-Verstärkern (z.B. dem MAX 430) liegt sie bei 1μV.

Offset-Spannungen addieren sich zur Eingangs-Spannung des OP's. Deshalb interessieren sie nur bei hohen Verstärkungen $V_u = R_2/R_1$. Sie erzeugen bei proportionaler Beschaltung des OP's am Ausgang einen Nullpunkts-Fehler $u_a = V_u \cdot U_0$ und bei Integratoren eine **Drift**

$\Delta u_a / \Delta t = U_0 / T \cdot I$. Diese Drift ist bei der Fluss-Messung unerwünscht und muss, so gut es geht, vor der Messung bei ruhender Mess-Spule auf Null abgeglichen werden. Dazu dient das **Simulation der Flussdichte-Messung**

Wenn man in der Lage ist, einen gemessenen Vorgang durch eine Detail-Struktur zu **erklären** und zu simulieren, sodass die Simulation mit der Messung überein stimmt, kann man annehmen, den Vorgang gut verstanden zu haben. Das wird in allen folgenden Kapiteln nach Möglichkeit geschehen.

Eine zweite Möglichkeit der Darstellung eines Systems ist die **formale** Beschreibung eines gemessenen Vorgangs (hier die Flussdichte eines Stabmagneten). Weil auch dies zum besseren Verständnis des Magnetismus und der Induktion beiträgt, soll es hier als Beispiel dafür dienen, dass Simulationen auch dann möglich sind, wenn Details noch nicht verstanden sind. Dann genügt bereits eine gemessene Kennlinie zur Simulation. Generell bestehen zwei Möglichkeiten der formalen Beschreibung einer Messung:

1. Die punktweise Nachbildung einer bekannten Kennlinie durch eine Tabelle.
Dieses Verfahren ist **immer anwendbar**, wird aber umso mühseliger, je feiner die geforderte Auflösung ist. Sie muss bei nachfolgender Differenzierung besonders groß sein.
2. Die Nachbildung der gemessenen Kennlinie durch eine passende Funktion. Das setzt natürlich voraus, dass so eine (möglichst einfache) Funktion gefunden wird. Hilfreich bei der Suche sind Intuition und Erfahrung.

Beide Verfahren sollen nun auf die Flussdichte-Messung des bereits genannten Stabmagneten angewendet werden.

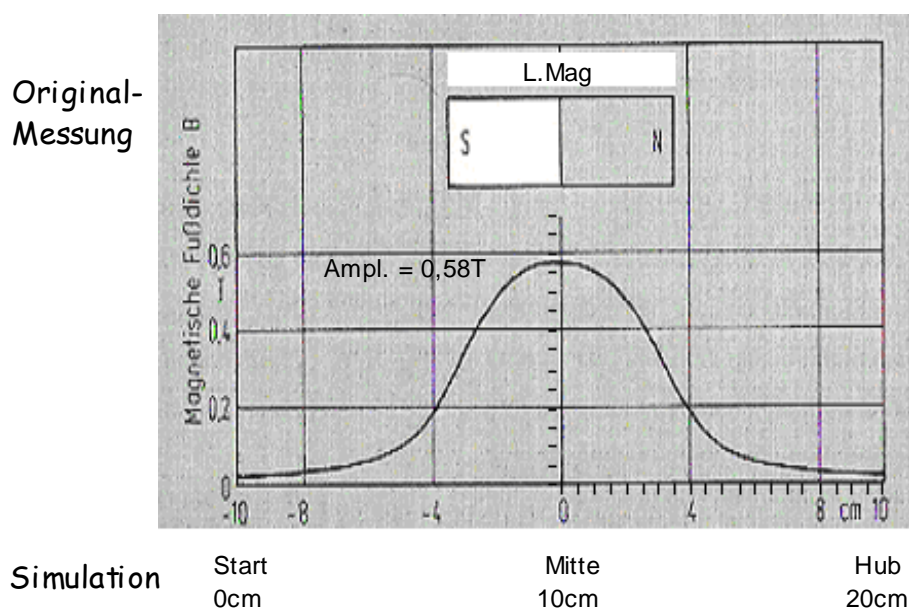


Abb. 4-70 Gemessene Kennlinie der Flussdichte B eines Stab-Magneten. Sie soll zuerst durch eine Tabelle mit diskreten Werten und danach durch eine stetige Funktion simuliert werden.

Wenn die Alternative zwischen einer Tabelle und einer stetigen Funktion besteht, ist letztere vorzuziehen, denn

1. ist sie durch ihre Parameter leichter an die Realität anzupassen und
2. ist sie differenzierbar.

Kennlinie



Nachbildung einer Flussdichte-Funktion durch ein Kennlinien-Glied

Die Anfertigung einer Tabelle erfolgt in SimApp durch einen **Kennlinien-Block**. Sie finden ihn in der Kategorie ‚Nichtlinear‘. Zur Eingabe der **Stützpunkte** ziehen Sie den Block ‚Kennl.‘ in Ihre SimApp-Zeichnung, öffnen ihn durch Mausklick und rufen ‚Daten‘ auf. Dann geben Sie die geplante **Anzahl der Stützpunkte** ein (hier 21) und machen die Eintragungen der Wertepaare, hier der Verschiebeweg x und die Flussdichte $B(x)$, die Sie der gemessenen Kennlinie entnehmen.

Einstellungen zur Zeitsimulation

Parameter

Simulationsdauer: 20 s

Integrationsschrittweite: 0,01 s

Zeitaufösung: 0,01 s

Datenspeicher:

Numerische Integrationsmethode:

- Euler
- Euler-Cauchy (2-stufig)
- Heun (Prädiktor-Korrektor-Methode)
- Runge-Kutta 3. Ordnung
- Runge-Kutta 4. Ordnung

Kennlinienglied (B(x))

Parameter | Daten | Optionen

	Eingang	Ausgang
1	0	0,01
2	1	0,015
3	2	0,02
4	3	0,03
5	4	0,06
6	5	0,1
7	6	0,2
8	7	0,36
9	8	0,5
10	9	0,58
11	10	0,6
12	11	0,58
13	12	0,5
14	13	0,36
15	14	0,2
16	15	0,1
17	16	0,06
18	17	0,03
19	18	0,02
20	19	0,015
21	20	0,01

Anzahl Stützpunkte: 21

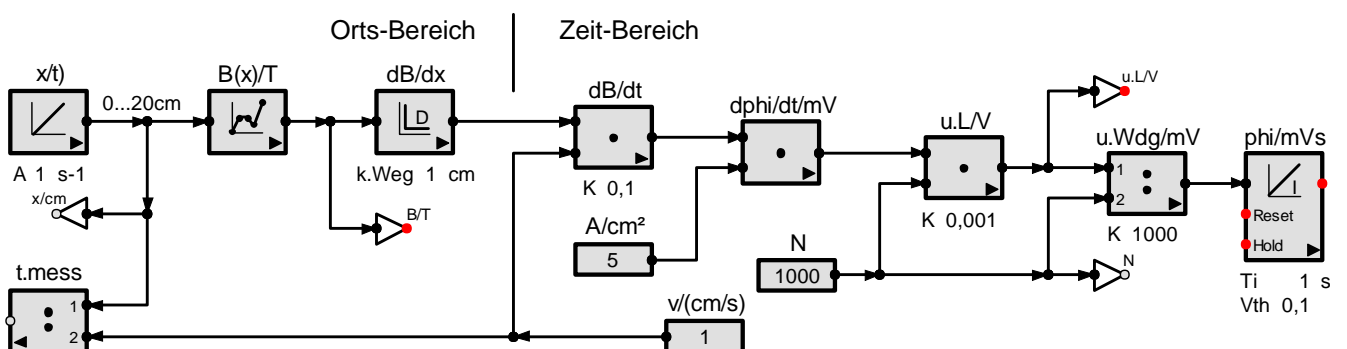
Interpolation:

- Linear
- Rechteck

B(x)

Abb. 4-71 Herstellung einer SimApp-Tabelle mittels Kennlinien-Glied. Da die Null nicht mitzählt, entspricht den 21 Stützpunkten die Simulations-Zeit von 20s.

Simulierte Berechnung der Flussdichte eines Stab-Magneten mit Kennlinie



Struktur 4-24 Fluss eines Dauer-Magneten mit Kennlinienglied (KL):

Die Simulations-Ergebnisse

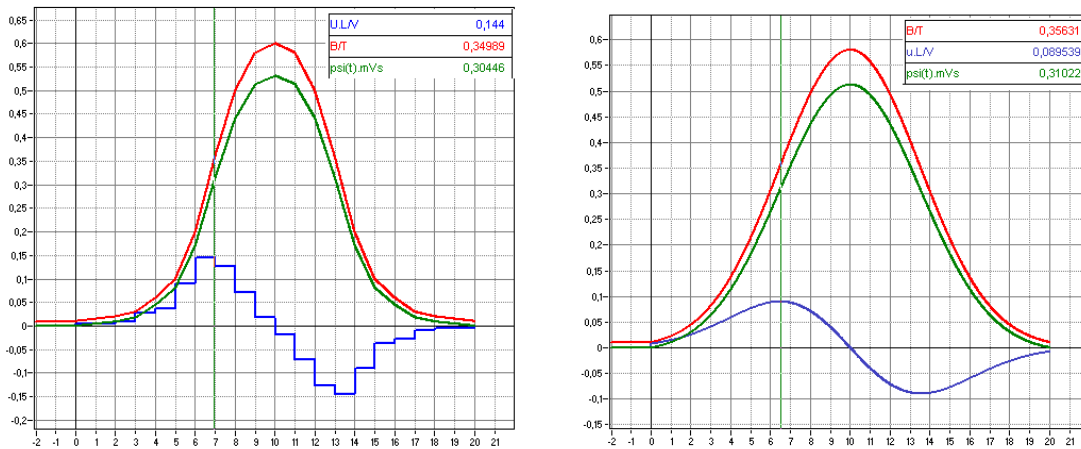


Abb. 4-72 Nachbildung der Flussdichte-Funktion eines Dauer-Magneten. Links: durch eine Tabelle mit 21 Stützwerten, rechts durch eine Gauss-Funktion. Blau: die aus der zeitlichen Flussänderung $d\phi/dt$ abgeleitete, induzierte Spannung u.L.

Die Gauß-Funktion

Nun soll der gemessene Verlauf der Flussdichte eines Stab-Magneten durch eine empirisch, d.h. durch Probieren und Intuition, gefundene, stetige Funktion nachgebildet werden. Den Autor hat der gemessene Verlauf (Abb.5-91) an die aus der Statistik bekannte **Gauss'sche Glockenkurve** erinnert. Deshalb versuchen wir es mit ihr:

$$\text{Gauß'sche Glockenkurve: } y = \text{Ampl} \cdot e^{-\{(\Delta x / (c \cdot \text{HWB}))\}^2}$$

... mit der Mitten-Abweichung Δx und der Halbwertsbreite HWB.

Die Gauß'sche Glockenkurve stellt eine rechts und links von einem Zentrum exponentiell abfallende Amplitude dar, so wie es bei der Flussdichte des Stabmagneten gemessen worden ist. Ihre Parameter sind die **Amplitude** des Zentrums **Ampl** und die **Halbwertsbreite HWB**.

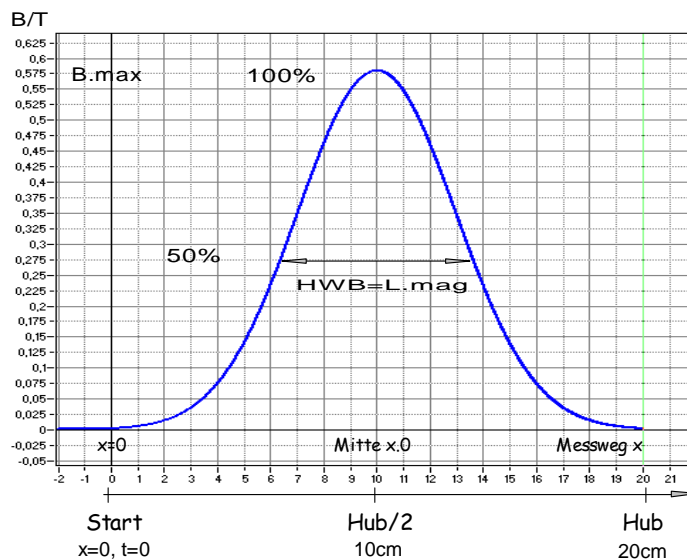


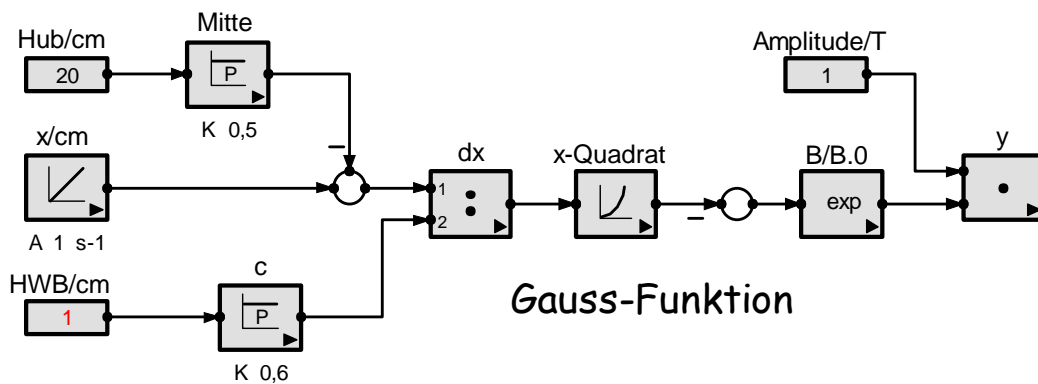
Abb. 4-73 Gauss'sche Glockenkurve mit ihren Parametern Maximalwert (hier B.Max) und der Halbwertsbreite HWB, hier 7cm.

Der Exponent $-\{\Delta x / (c \cdot \text{HWB})\}^2$ ist für positive und negative Abweichungen $\Delta x = x - x_0$ immer negativ. Deshalb werden die Amplituden rechts und links der Mitte kleiner. Die halbe Halbwertsbreite $\text{HWB}/2$ ist die Auslenkung Δx , bei der die Amplitude auf 50% des Maximalwerts abgesunken ist. Der Faktor c im Exponenten bewirkt, dass bei $\Delta x = \text{HWB}/2$ der Funktionswert $y/\text{Ampl} = 0,5$ wird. Dadurch erhält die Halbwertsbreite HWB ihren Namen. Wir ermitteln c durch Logarithmierung beider Seiten der Gauss-Gleichung:

$$-\ln 0,5 = 0,7 = 1/(2c)^2 \rightarrow c \approx 0,6$$

Simulation einer Gauss'schen Glockenkurve

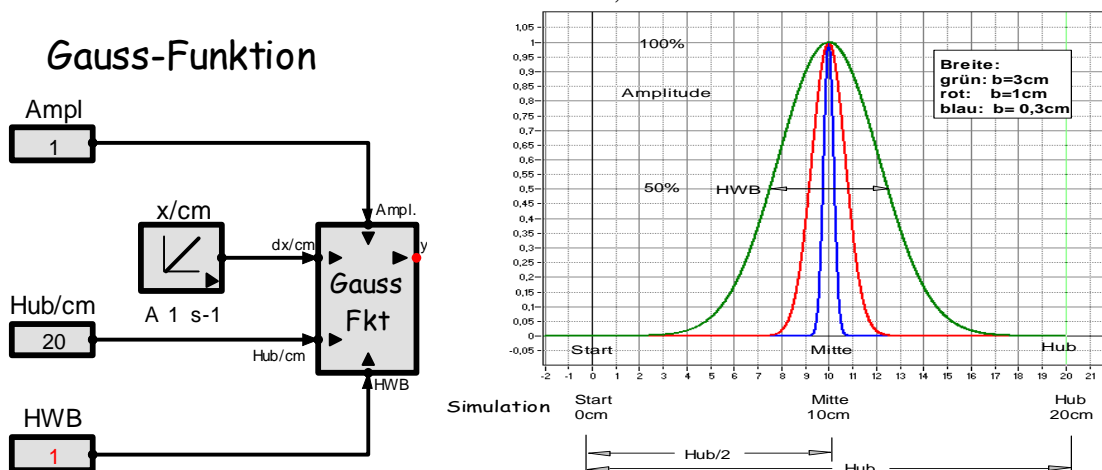
Die folgende Abbildung zeigt die Struktur der Gauss-Funktion. Da diese eine Nullsymmetrische Funktion ist, wir aber nur positive Verschiebungen x (von 0 bis zum Hub $x_{\text{max}}/2$) haben, beginnt die Struktur mit einer Symmetrierung: $dx = x - \text{Hub}/2$.



Struktur 4-25 Gauss-Funktion: Struktur der Gauss-Funktion. Als Parameter sind der gesamte Messweg (Hub) und die Halbwertsbreite einzugeben.

Die Gauss-Funktion als Block

Aus obiger Struktur der Gauss-Funktion machen wir in SimApp einen Anwender-Block. Zum Test variieren wir die Halbwertsbreite: $\text{HWB}: 0,3 - 1 - 3$.



Struktur 4-26 Gauss mit Block:

Vergleich von Messung und Simulation eines Stab-Magneten

Mit dem Gauss-Block können wir die gemessene Flussdichte des Stabmagneten aus Abb.5-87 sofort berechnen. Das gestattet den Vergleich mit der anfangs erzeugten Tabelle der realen Messung.

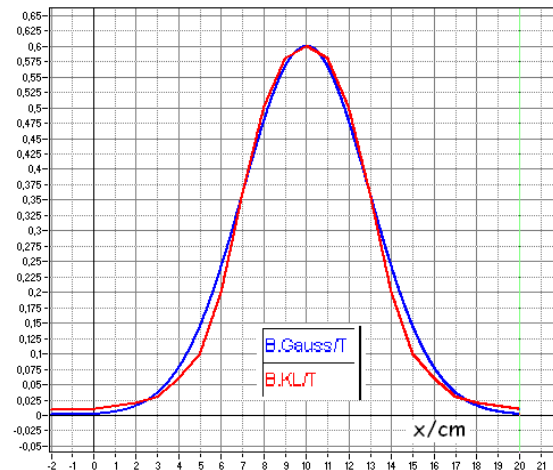


Abb. 4-74 Vergleich der aus einer Messung gewonnenen (diskreten) Tabellen-Werte $B(x)$ mit einer (stetig, differenzierbaren), Gauss'schen Glockenkurve. Man erkennt: Sofern die Alternative besteht, ist in Simulationen immer die stetige Funktion vorzuziehen.

Die Länge des Stabmagneten L_{Mag} , hier 7cm, ist gleich der Halbwertsbreite HWB der Gauss'schen Glockenkurve. Die Übereinstimmung zwischen der Messung, festgehalten in einer Tabelle (KL) und der Glockenkurve, ist erstaunlich gut. Ob dies Zufall ist oder für alle lang-gestreckten Stabmagnete gilt, müsste durch eine Messreihe mit verschiedenen langen Magneten mit unterschiedlichen Querschnitten untersucht werden.